p 156, Gourdon Algèbre

Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $SL_n(\mathbb{K})$

Théorème Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations et $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.

• Soit $T = I_n + \lambda E_{i,j}$ une matrice de transvection.
Comme $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0$. On obtient alors :
$(I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{i,j}) = I_n - \lambda^2 E_{i,j}^2 = I_n$

Ainsi, l'inverse d'une matrice de transvection est une matrice de transvection.

• Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe $M_1, \dots, M_p, M_1', \dots, M_q'$ des matrices de transvection telles que $A = M_p \cdots M_1 D_n(\det A) M_1' \dots M_q'$:

– si $n = 1$, le résultat est immédiat car $A = \det A$

– supposons que ce soit vrai au rang $n-1$ avec $n > 1$
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, comme A est inversible, la première colonne est non nulle.
Il existe donc une matrice de transvection $T_1 = I_n + \lambda E_{2,j}$ telle que le coefficient d'indice $(2,1)$ de $T_1 A$ soit non nul. j tel que $a_{1j} \neq 0$
Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que si $T_2 = I_n + \mu E_{1,2}$ alors $T_2 T_1 A$ ait son coefficient $(1,1)$ égal à 1.
On peut donc trouver $B_1, \dots, B_p$ des matrices de transvections telles que :

$$B_p \dots B_1 T_2 T_1 A = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix} \quad \text{avec } B_k \text{ de la forme } I_n + \lambda_k E_{i,1}$$

Il existe des matrices de transvection $B_1', \dots, B_q'$ telles que :

$$B_p \dots B_1 T_2 T_1 A B_1' \dots B_q' = A' \quad \text{avec } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Or $\det A = \det B \neq 0$ donc $B \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$. Donc par hypothèse de récurrence, il existe des matrices de transvection $C_1, \dots, C_r$ et $C_1', \dots, C_s'$ telles que : $B = C_r \dots C_1 D_{n-1}(\det A) C_1' \dots C_s'$. dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$
Les matrices

$$F_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_i & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, r \quad \text{et} \quad F_j' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_j' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, s$$

sont des matrices de transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et vérifient : $A' = F_r \dots F_1 D_n(\det A) F_1' \dots F_s'$.
Donc :
$$A = T_1^{-1} T_2^{-1} B_1^{-1} \dots B_p^{-1} F_r \dots F_1 D_n(\det A) F_1' \dots F_s' B_q'^{-1} \dots B_1'^{-1}$$
D'où le résultat puisque d'après ce qu'on a vu plus haut, l'inverse d'une matrice de transvection est une matrice de transvection.

• Or pour $A \in SL_n(\mathbb{K})$, $\det A = 1$.
Donc pour tout n, $D_n(\det A) = I_n$.
Ainsi, tout élément de $SL_n(\mathbb{K})$ est un produit de transvections.